Aufgabe 3

Wir definieren die Abbildung

$$f: A_1 \cup A_2 \to A_1 \amalg A_2$$
$$a \mapsto \begin{cases}(a,1), & a \in A_1 \\ (a,2), & a \in A_2\end{cases}$$

Diese ist wohldefiniert, da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Nun betrachten wir zudem die Projektion

$$pr_1 : A_1 \amalg A_2 \to A_1 \cup A_2$$

auf den ersten Eintrag und erhalten

$$pr_1 \circ f(a) = \begin{cases} pr_1(a,1), & a \in A_1 \\ pr_1(a,2), & a \in A_2 \end{cases} = a$$

und

$$f \circ pr_1(a,i) = f(a) = \begin{cases}(a,1), & a \in A_1 \\ (a,2), & a \in A_2\end{cases}$$

für $i = 1,2$. Da ein Element der Form (a,i) aus A_i von A_i stammt, zeigen diese Rechnungen also, dass pr_1 die Umkehrabbildung von f und f somit bijektiv ist.

Die Folgerung gilt ohne Annahme sicherlich nicht:

$$|\{1\} \cup \{1\}| = |\{1\}| = 1$$

$$|\{1\} \amalg \{1\}| = |\{(1,1),(1,2)\}| = 2$$

$\leadsto$ kann keine Bijektion $\{1\} \cup \{1\} \to \{1\} \amalg \{1\}$ geben.

Die lin. Abbildung

$$f: U_1 \oplus U_2 \to U_1 + U_2$$
$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

ist offenbar surjektiv. Für die Injektivität müssen wir zeigen, dass sich unter der Bedingung $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ jeder Vektor in $U_1 + U_2$ eindeutig als Summe $v_1 + v_2$ schreiben lässt. Sei also $v \in U_1 + U_2$ und schreibe

$v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$

mit $v_1, v_1' \in U_1$, $v_2, v_2' \in U_2$. Wir erhalten somit

$$\underbrace{v_1 - v_1'}_{\in U_1} = \underbrace{v_2 - v_2'}_{\in U_2}$$

in $U_1 \cap U_2$, also $v_1 - v_1' = 0 = v_2 - v_2'$.

Somit $v_1 = v_1'$ und $v_2 = v_2'$ und die Summendarstellung von v ist eindeutig.

Die Folgerung gilt ohne Annahme nicht:

$V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = \langle(1,0)\rangle = U_2$

$\rightsquigarrow \quad U_1 \cap U_2 = \langle(1,0)\rangle \neq \{0\}$

Die Abbildung

$$f: U_1 \oplus U_2 \to U_1 + U_2$$
$$(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

ist nicht injektiv, da z.B.

$((1,0),(1,0)) \mapsto (2,0)$

und

$((2,0),(0,0)) \mapsto (2,0)$.

Aufgabe 4

(a)

Definiere

$$f: V \to \prod_{i\in I} W_i, \quad v \mapsto (f_i(v))_{i\in I}.$$

Dann ist f K-linear, da die f_i für alle $i \in I$ K-linear sind. Zudem gilt

Studenten hier gerne etwas ausführlicher

$$\pi_j \circ f(v) = \pi_j((f_i(v))_{i\in I}) = f_j(v)$$

für alle $v \in V$ und $j \in I$. Ist nun $g: V \to \prod_{i\in I} W_i$ eine weitere solche lin. Abbildung, d.h. es gilt $\pi_j \circ g = f_j$ für alle $j \in I$, so erhalten wir

$$\pi_j \circ f(v) = f_j(v) = \pi_j \circ g(v)$$

für alle $v \in V$ und $j \in I$. Somit stimmen die j-ten Einträge von $f(v)$ und $g(v)$ für alle $j \in I$ und $v \in V$ überein, sodass $f = g$. Somit ist eine solche Abbildung eindeutig.

(b)

Definiere

$$f: \bigoplus_{i\in I} V_i \to W, \quad (v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i)$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da Elemente von $\bigoplus_{i\in I} V_i$ nur endlich viele Nichtnull-Einträge besitzen und lineare Abbildungen Nullen erhalten. Zudem ist f K-linear, da die f_i K-linear sind.

Nun gilt

$$f \circ \iota_j(v_j) = f(0,\dots,0,\underset{j\text{-te Stelle}}{v_j},0,\dots) = f_j(v_j)$$

für alle $v_j \in V_j$ und $j \in I$. Ist $g: \bigoplus_{i\in I} V_i \to W$ noch so eine lin. Abbildung, d.h. es gilt $g \circ \iota_j = f_j$ für alle $j \in I$, so erhalten wir, dass aufgrund von

$$g \circ \iota_j(v_j) = f_j(v_j) = f \circ \iota_j(v_j)$$

für alle $v_j \in V_j$ und $j \in I$, die Abbildungen f und g übereinstimmen. auf Elementen der Form $(0,\dots,0,v_j,0,\dots)$. Somit stimmen f und g aufgrund der Linearität auf allen Elementen von $\bigoplus_{i\in I} V_i$ überein, sodass ein solches f eindeutig ist.

(a) bleibt nicht richtig, wenn wir $\prod$ durch $\bigoplus$ ersetzen:

$f_n: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}, \; x \mapsto nx$

Ang., es gäbe eine solche K-Lin. Abb. $f: \mathbb{R} \to \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$,

d.h. es gelte

$\pi_n \circ f = f_n$.

Da dann $\pi_n \circ f(1) = f_n(1) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss, kann $f(1)$ nicht in $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ liegen (unendlich viele Einträge sind $\neq 0$)

Somit kann es kein solches f geben.

(b) bleibt auch nicht richtig, wenn wir $\bigoplus$ durch $\prod$ ersetzen:

Betrachte

$f_n: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{lin}} \mathbb{R}, \; x \mapsto nx$

von oben.

Nun gibt es mehrere K-lin. Abb. $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der gewünschten Eigenschaft:

$f: \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto n\, \pi_n (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

klappt per Definition, aber auch

$f': \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto n\, \pi_n (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + x_{n+1}$

klappt, da mittels Vorschaltung von in der Eintrag x_{n+1} trivial ist.